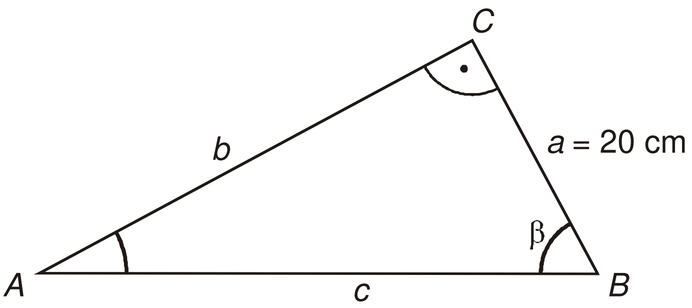
4.3.15 Tabulkové hodnoty goniometrických funkcí

Předpoklady: 040314

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* má pravý úhel při vrcholu *C* a odvěsnu *a* o délce 20 cm. Urči jeho zbývající strany a úhly v trojúhelníku, jestliže úhel β má velikost $71°$.

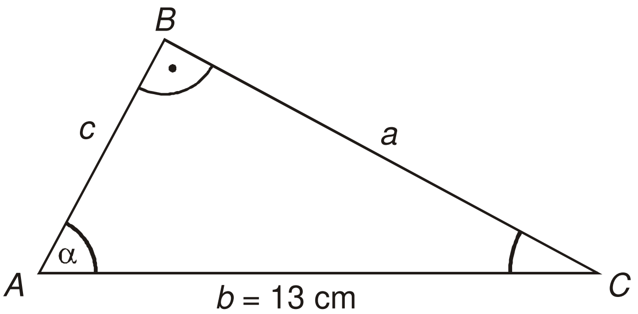


Pro úhel α: $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 71° = 19°$.

Pro stranu *b*: $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{tg} \beta = 20 \cdot \operatorname{tg} 71° \text{ cm} = 58{,}08 \text{ cm}$.

Pro stranu *c*: $\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos \beta \Rightarrow c = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{20}{\cos 71°} \text{cm} = 61{,}43 \text{ cm}$.

Př. 2: Urči ostatní strany a úhly pravoúhlého trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem β, s úhlem $\alpha = 58°38'$ a s přeponou o délce 13 cm.



Pro úhel γ: $\gamma = 180° - \beta - \alpha = 180° - 90° - 58°38' = 31°22'$.

Pro stranu *a*: $\sin \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \sin \alpha = 13 \cdot \sin 58°38' \text{cm} = 11{,}10 \text{ cm}$.

Pro stranu *c*: $\cos \alpha = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot \cos \beta = 13 \cdot \cos 58°38' \text{cm} = 6{,}77 \text{ cm}$.

Dobrá zpráva: Pomocí přibližných hodnot goniometrických funkcí dokážeme dopočítat strany a úhly v pravoúhlých trojúhelnících.

Malý matematicko-estetický problém: Hodnoty z papírků i hodnoty z kalkulaček jsou pouze přibližné (a matematici mají rádi zcela přesné výsledky).

Př. 3: V jaké situaci bychom mohli určit přesně hodnoty goniometrických funkcí pro nějaký úhel?

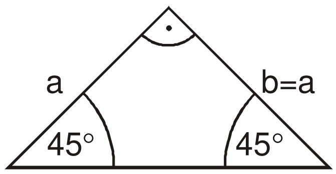
Pokud bychom našli pravoúhlý trojúhelník, u kterého bychom znali:

- přesné hodnoty vnitřních úhlů,
- přesné délky stran.

Takové trojúhelníky známe dokonce dva. Jedním z nich je **rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník**.

Př. 4: Načrtni obrázek rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsny *a*. Urči velikosti přepony a vnitřních úhlů. Tyto výsledky použij na určení přesných hodnot goniometrických funkcí pro určené úhly.

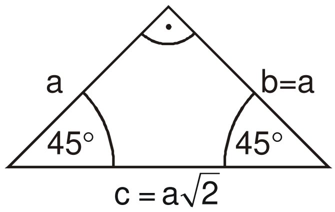
Ramena jsou stejně dlouhá.



Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



Z trojúhelníku můžeme určit hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $\alpha = 45°$,

$$\sin 45° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

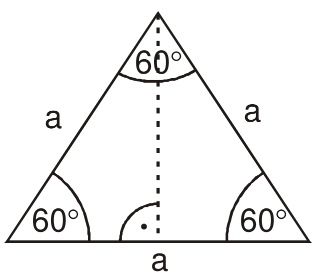
$$\operatorname{tg} 45° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

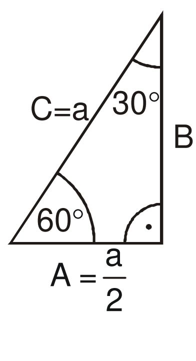
$$\operatorname{cotg} 45° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{a}{a} = 1$$

Př. 5: Načrtni obrázek rovnostranného trojúhelníku o délce strany *a*. Rozděl trojúhelník jednou z výšek na dvě stejné poloviny. Jaké trojúhelníky jsi získal? Urči velikosti stran a vnitřních úhlů získaného trojúhelníku. Výsledky použij na určení přesných hodnot goniometrických funkcí pro určené úhly.

Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly $30°$ a $60°$.



$\Rightarrow$

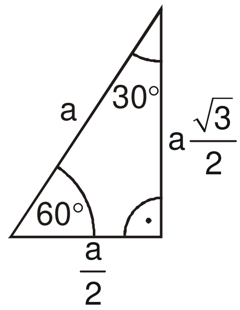


Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$

$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$

$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$



Z obrázku můžeme určit hodnoty goniometrických funkcí pro úhly $60°$ a $30°$.

Hodnoty goniometrických funkcí pro $\alpha = 60°$.

$\sin 60° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{tg}\, 60° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}\, 60° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Hodnoty goniometrických funkcí pro $\alpha = 30°$.

$\sin 30° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 30° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}\, 30° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

Př. 6: Využij hodnoty z předchozích příkladů k doplnění tabulky. Řídí se hodnoty v tabulce nějakými pravidly? Jak si hodnoty v tabulce co nejsnáze zapamatovat?

Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin(x)$					
$\cos(x)$					
$\mathrm{tg}(x)$					
$\mathrm{cotg}(x)$					

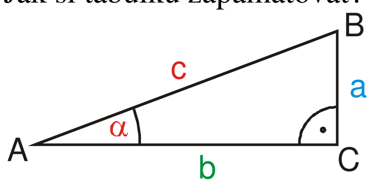
Přepíšeme do tabulky hodnoty z předchozích příkladů. Hodnoty funkcí pro $0°$ a $90°$ jsme si určili už dříve.

Hodnoty goniometrických funkcí pro základní úhly:

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin(x)$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**

$\cos(x)$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
$\mathrm{tg}(x)$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	
$\mathrm{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Jak si tabulku zapamatovat?



$\sin x = \frac{a}{c}$ $\Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\sin x$ **zvětšuje**

$\cos x = \frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\cos x$ **zmenšuje**

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin(x)$	$0=\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1=\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1=\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0=\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	
$\mathrm{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Všechny hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ můžeme zapsat ve stejném tvaru $\frac{\sqrt{\check{c}\acute{\imath}slo}}{2}$.

- Pro $\sin x$ dosazujeme postupně 0 až 4 (hodnoty rostou).
- Pro $\cos x$ dosazujeme postupně 4 až 0 (hodnoty klesají).

Podobně můžeme (až na krajní hodnoty), rozepsat i hodnoty funkce tangens a kotangens.

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin(x)$	$0=\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1=\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1=\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0=\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{(\sqrt{3})^2}{3}=1$	$\frac{(\sqrt{3})^3}{3}=\sqrt{3}$	
$\mathrm{cotg}(x)$		$\frac{(\sqrt{3})^3}{3}=\sqrt{3}$	$\frac{(\sqrt{3})^2}{3}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Dodatek: Pomocí vzorců, které se probírají později, je možné určit přesné hodnoty goniometrických funkcí i pro další úhly.

Př. 7: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30°$ má velikost přepony $c = 10\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Pro stranu *a*: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 30° \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\,\text{cm}$.

Pro stranu *b*: $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 30° \cdot 10 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{3} \doteq 8{,}66\,\text{cm}$.

Shrnutí: Pro úhly $30°$, $45°$ a $60°$ dokážeme vyjádřit hodnoty goniometrických funkcí zcela přesně.